| | | |
|---|---|---|
| TTY | 72041 Fysiikan työt I | 10.10.2009 |
| PA | 2.7 Gravitaatiovakio | 194621 Laura Metsänen<br>TiTe<br>181509 Olli Pietikäinen<br>TiTe |

# Sisältö

# 1 Johdanto

Tässä työssä tutustuttiin gravitaatiovakion mittaamiseen Cavendishin vaa'alla. Gravitaatiovakio määritettiin kahdella tavalla: loppupoikkeamaa ja alkukiihtyvyyttä käyttäen. Mittaukset suoritettiin fysiikan oppilaslaboratoriossa.

Tässä dokumentissa esitellään työn taustalla olevaa teoriaa, selostetaan koejärjestely, esitellään mittauksista saadut tulokset ja niiden pohjalta tehdyt määritykset, tarkastellaan työn tulosten virhettä ja lopuksi arvioidaan saatujen tulosten merkitystä.

# 2 Teoria

Gravitaatiolain mukaan kaksi kappaletta vaikuttavat toisiinsa saman suuruisella, mutta vastakkaissuuntaisella voimalla. Tätä voimaa kutsutaan gravitaatiovoimaksi. Gravitaatiovakio on universaali luonnonvakio, joka määrää kahden kappaleen välisen gravitaatiovoiman yhdessä kappaleiden massojen ja niiden massakeskipisteiden kanssa.

Tässä työssä gravitaatiovakio määritettiin kokeellisesti Cavendishin vaa'alla. Vaa'assa on kiertoalusta, johon on kiinnitetty kaksi suurimassaista palloa ja torsiolanka, jossa roikkuvan akselin päissä on kaksi pienimassaista palloa.

Ensimmäisessä vaiheessa suuret pallot kierretään uuteen asemaan, jolloin niiden ja pienten pallojen välinen gravitaatiovoima saa pienet pallot liikkeeseen. Torsiolangan vastamomentti tasapainottaa gravitaatiovoimaa ja pienet pallot asettuvat uuteen tasapainoasemaan jo muutaman heilahdusjakson jälkeen.

Torsiolankaan on kiinnitetty peili, joka heijastaa valonsäteen mitta-asteikolle, josta voidaan lukea poikkeaman suuruus. Gravitaatiovakio voidaan laskea poikkeaman suuruudesta, uuden tasapainoaseman löytymiseen kuluvasta ajasta ja vaa'an geometriasta.

| Suure | Arvo | Tarkkuus |
|---|---|---|
| $b$ (m) | 0,047 | 0,001 |
| $d$ (m) | 0,050 | 0,001 |
| $L$ (m) | 0,70 | 0,005 |
| $m_1$ (kg) | 1,5 | - |
| $m_2$ (kg) | 0,020 | - |

Taulukko 1: Käytettyyn vaakaan liittyviä arvoja

# 3 Työn suoritus

Gravitaatiovakio määritettiin Cavendishin vaa'alla kohdassa 2 kuvatun periaatteen mukaisesti. Tietokoneohjelma mittasi valonsäteen liikkumisen mitta-asteikolla. Työn alussa käynnistettiin mittausta suorittava tietokoneohjelma, vaihdettiin asetukset työohjeen [1] mukaisiksi ja odotettiin puolisen minuuttia. Tämän jälkeen vaa'an isot pallot käännettiin varovaisesti uuteen ääriasentoon, tarkistettiin, että käyrä lähti piirtymään odotetun näköisesti ja jätettiin mittausohjelma mittaamaan vaa'an tasapainoittumista tunniksi.

Tunnin kuluttua vaa'an isot pallot käännettiin jälleen alkuperäiseen ääriasentoon, tarkistettiin jälleen, että käyrä lähti piirtymään odotetun näköisesti, ja jätettiin mittausohjelma jälleen tunniksi mittaamaan vaa'an tasapainoittumista.

# 4 Mittaustulokset ja havainnot

Työohjeesta saatiin käytettyyn vaakaan liittyvät arvoja, jotka on listattu taulukossa 4. $b$ on ison ja pienen pallon välinen etäisyys, $d$ pienet pallot yhdistävän akselin pituus, $L$ peilin etäisyys mitta-asteikosta, $m_1$ suuren pallon massa ja $m_2$ pienen pallon massa.

## 4.1 Loppupoikkeaman analysointi

Mittaustapahtuman eri puoliskot on esitetty omissa taulukoissaan. Alkupuoliskon mittaustulokset on esitetty taulukossa 2. Alkupuoliskon loppupoikkeaman approksi-

| | t (s) | s1 (m) |
|---|---|---|
| alkupoikkeama | 0,0 | 0,0345 |
| loppupoikkeama | 3217,5 | 0,0524 |
| 1. maksimi | 360,0 | 0,0697 |
| 2. maksimi | 956,2 | 0,0653 |
| 3. maksimi | 1563,7 | 0,0614 |
| 4. maksimi | 2182,5 | 0,0588 |
| tarkkuus | 0,1 | 0,0001 |

Taulukko 2: Alkupuoliskon mittaustulokset

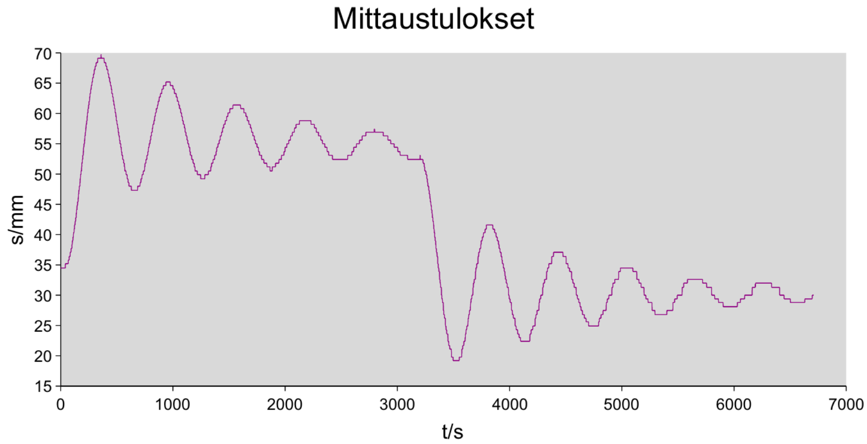
| | t (s) | s1 (m) |
|---|---|---|
| alkupoikkeama | 3228,7 | 0,0524 |
| loppupoikkeama | 6693,7 | 0,0299 |
| 1. maksimi | 3532,5 | 0,0192 |
| 2. maksimi | 4140,0 | 0,0224 |
| 3. maksimi | 4747,5 | 0,0249 |
| 4. maksimi | 5343,7 | 0,0268 |
| tarkkuus | 0,1 | 0,0001 |

Taulukko 3: Loppupuoliskon mittaustulokset

maation $M$ arvoksi saatiin mittausohjelmasta 0,0552 m (tarkkuus 0,0001 m). Kolmen jaksonajan keskiarvoksi saatiin 607,5 s.

Loppupuoliskon mittaustulokset on esitetty taulukossa 3. Loppupuoliskon loppupoikkeaman approksimaation $M$ arvoksi saatiin mittausohjelmasta 0,00308 m (tarkkuus 0,0001 m). Kolmen jaksonajan keskiarvoksi saatiin 603,733... s.

Tietokoneen mittaamista tuloksista piirretty käyrä on esitetty kuvassa 1.




Kuva 1: Mittaustulokset

### 4.2 Alkukiihtyvyysmenetelmä

Mittausohjelmasta saatiin alkupuoliskon alkuun piirretyn paraabelin vakioille $A$, $B$ ja $C$ arvot $A = 0,000639 mm/s^2$, $B = -0,0281 mm/s$ ja $C = 34,7 mm$.

## 5 Tulosten laskenta

### 5.1 Loppupoikkeaman analysointi

Gravitaatiovakio voidaan laskea kaavalla

$$G = \frac{\pi^2 b^2 d \Delta S}{m_1 T^2 L}, \tag{1}$$

jossa $b$ on ison ja pienen pallon välinen etäisyys, $d$ on heilurivarren eli pienet pallot yhdistävän akselin pituus, $\Delta S$ on kuvaajasta määritetty loppu- ja alkupoikkeaman erotus, $m_1$ on ison pallon massa, $T$ kolmen jaksonajan keskiarvo ja $L$ on torsiolangan peilin ja varjostimen välinen etäisyys. [2]

Käytettävissä on kaksi eri mittausjaksoa. Laskemme gravitaatiovakion molemmista mittausjaksoista. Kun ensimmäisen mittausjakson arvot sijoitetaan kaavaan 1, saadaan tulokseksi $5,035430811 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$. Jos kuvaajasta luetun loppupoikkeaman sijaan käytetään loppupoikkeaman approksimaatiota M, tulokseksi saadaan

$5,8230959660 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$. Kun toisen mittausjakson arvot sijoitetaan samaiseen kaavaan 1, saadaan tulokseksi $6,3329265171 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$. Loppupoikkeaman approksimaatiota käytettäessä tulokseksi saadaan $6,0796094564 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$.

### 5.2 Alkukiihtyvyysmenetelmä

Alkukiihtyvyysmenetelmä perustuu siihen, että kokeen alussa vain gravitaatiovoima antaa heilurille kiihtyvyyttä, koska torsiolangan vastamomentti ei ole vielä kehittynyt. Kiihtyvyys saadaan sovittamalla paraabeli heilahdusfunktion alkuosalle tietokoneen avustuksella. Paraabelin yhtälö on $S = At^2 + Bt + C$, jonka pohjalta voimme laskea gravitaatiovakion kaavalla

$$G = \frac{2Adb^2}{m_1 2L}, \tag{2}$$

jossa $d$, $b$, $m_1$ ja $L$ ovat samat kuin kaavassa 1 ja $A$ paraabelin $S$ kerroin $A$. Kun tunnetut arvot sijoitetaan kaavaan, saadaan tulokseksi $6,7216714286 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$.

## 6 Virhearvio

Käytetään virhearvioon virheiden kasautumislakia. Sen mukaan loppupoikkeamaa analysoimalla määritetyn gravitaatiovakion maksimivirhe on

$$\Delta G = \left| \frac{\pi^2 2bd\Delta S}{m_1 T^2 L} \right| \Delta b + \frac{\pi^2 b^2 \Delta S}{m_1 T^2 L} \Delta d + \frac{\pi^2 b^2 d}{m_1 T^2 L} \Delta(\Delta S) + \frac{\pi^2 b^2 d\Delta S}{m_1^2 T^2 L} \Delta m_1 + \frac{\pi^2 b^2 d\Delta S}{m_1 T^4 L} \Delta T + \frac{\pi^2 b^2 d\Delta S}{m_1 T^2 L^2} \Delta L. \tag{3}$$

Vastaavasti alkukiihtyvyysmenetelmän maksimivirhe on

$$\Delta G = \frac{db^2}{m_1 L} \Delta A + \frac{Ab^2}{m_1 L} \Delta d + \frac{2Adb}{m_1 L} \Delta b + \frac{-Adb^2}{m_1^2 L} \Delta m + \frac{-Adb^2}{m_1 L^2} \Delta L \tag{4}$$

Saimme gravitaatiovakiolle neljä eri arvoa, kun käytimme loppupoikkeaman analysointia eri mittausjaksojen arvoilla tai loppupoikkeaman lasketulla tai approksimoidulla arvolla. Taulukossa 4 on maksimivirhe kaikille neljälle arvolle sekä alkukiihtyvyysmenetelmällä lasketun arvon maksimivirhe.

| Versio | $G(\cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2})$ | $\Delta G(\cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2})$ |
|---|---|---|
| L.p. 1 | 5,035430811 | 0,732952388 |
| L.p. 2 | 5,8230959660 | 0,840360760 |
| L.p. 3 | 6,3329265171 | 0,909920911 |
| L.p. 4 | 6,0796094564 | 0,875377840 |
| A.k. | 6,7216714286 | 0,784090129 |

Taulukko 4: Laskettujen gravitaatiovakion arvojen maksimivirheet. L.p. 1 ja 2 on laskettu ensimmäiseltä mittausjaksolta ja L.p. 3 ja 4 toiselta mittausjaksolta. L.p. 1 ja 3 laskettaessa on käytetty kuvaajasta luettua loppupoikkeamaa, 2 ja 4 tapauksessa ohjelmiston antamaa loppupoikkeaman approksimaatiota.

# 7 Yhteenveto

Määritetyt gravitaatiovakion arvot listattiin taulukossa 4. Eräs gravitaatiovakion tunnettu kirjallisuusarvo on $6,67259 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ [3, s. 71]. Määritetyistä gravitaatiovakion arvoista vain ensimmäiseltä mittausjaksolta loppupoikkeamaa käyttäen määritetyt arvot (L.p. 1 ja 2) eivät virherajoineen kata oikeaa arvoa. Oikea arvo mahtuu kaikkien muiden arvojen virherajojen sisään.

Virhettä mittauksissa tuotti todennäköisesti se, ettei vaaka ehtinyt mittausjakson aikana hakeutua takaisin tasapainoasemaansa, vaan mittausjaksot päätettiin ennen sitä. Laskentatuloksista ei voida vetää johtopäätöstä siitä, kannattaako gravitaatiovakion määrittämisessä käyttää kuvaajasta luettua loppupoikkeamaa vai ohjelmiston antamaa approksimaatiota siitä.

Yleisesti gravitaatiovakion määrityksen voidaan katsoa onnistuneen. Kaikki saadut tulokset ovat oikeaa kertaluokkaa ja ensimmäiseltä mittausjaksolta tehtyjä määrityksiä (L.p. 1 ja 2) lukuun ottamatta kirjallisuusarvo on niiden kaikkien virherajojen sisällä.

# Viitteet


[1] "Fysiikantyöt 1 työpaikkaohje 2.7 gravitaatiovakion määritys," TTY, 2008. [Online]. Available: http://moodle.tut.fi/file.php/2016/2.7.Gravitaatio.tyoohje.paivitetty.20080415.LO.pdf

[2] "Fysiikantyöt 1 opintomoniste 2.7 gravitaatiovakio," TTY, 2007. [Online]. Available: http://moodle.tut.fi/file.php/2016/2.7.Gravitaatiovakio.pruju.paivitetty.20070809.LO.pdf

[3] M. Kervinen and J. Smolander, *MAOL-taulukot*, 2nd ed. Keuruu: Otava, 2000.

# Liitteet

1. Mittauspöytäkirja